



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

درس اول

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

در سال های قبل با مفاهیم زیر از احتمال آشنا شدید.

یادآوری

- ۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش بینی کرد.
- ۲- فضای نمونه ای: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه ای آن پدیده می نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می دهیم.
- ۳- پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه ای S می نامیم.
- ۴- پیشامدها و اعمال روی آنها
- فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه ای S باشند.
- الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.
- ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.
- ب) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.
- ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A^c (یا A') وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد.
- ۵- پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می گوئیم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ یعنی $A \cap B = \emptyset$.
- ۶- رابطه محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت های ممکن}}$$

۷- رابطه محاسبه احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال شرطی

فرض کنیم در یک قرعه کشی اعداد ۱ تا ۲۰ به بیست نفر اختصاص داده شده اند و قرار است یک شماره به تصادف انتخاب و به عنوان برنده اعلام شود. اگر شماره ۸ به دست شما افتاده باشد، با چه احتمالی شما برنده خواهید شد؟ $\frac{1}{20}$

اگر بدانید که یک شماره یک رقمی انتخاب خواهد شد، با چه احتمالی برنده خواهید شد؟ $\frac{1}{10}$

گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامدی دیگر تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال برنده شدن شما با دانستن اینکه شماره انتخابی، یک رقمی است، متفاوت خواهد بود از حالتی که این موضوع را ندانیم. در واقع احتمال اول را احتمال برنده شدن شما و احتمال دوم را احتمال برنده شدن شما به شرطی که شماره انتخاب شده یک رقمی باشد، می‌خوانیم.

منظور از "احتمال A به شرط B " که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است.

می‌دانیم که:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

حال با توجه به اینکه در $P(A|B)$ پیش فرض رخ دادن پیشامد B در نظر گرفته شده است، در صورت و مخرج کسر بالا خواهیم داشت:

- ۱- حالت‌های مطلوب، همه حالت‌هایی است که A رخ دهد، در حالی که B رخ داده است؛ یعنی همه حالت‌هایی که هم A و هم B رخ دهد، یا به عبارتی این تعداد برابر است با $n(A \cap B)$.

۲- همه حالت‌های ممکن در اینجا برابر همه حالت‌هایی است که در آنها B رخ داده باشد. به عبارتی این تعداد برابر با $n(B)$ است.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \Rightarrow$$

بنابراین داریم:

که با تقسیم صورت و مخرج این عبارت به $n(S)$ این رابطه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\star (1) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

توجه: شرط محاسبه احتمال پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B آن است که $P(B) \neq 0$. بنابراین اگر $P(B) = 0$ ، آنگاه $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

کار در کلاس

در یک مسابقه اتومبیل رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر $\frac{7}{8}$ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر $\frac{8}{9}$ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟ حل:

پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل: A

احتمال رسیدن به خط پایان: B

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = \frac{7}{8} \\ P(A \cap B) = \frac{7}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{9}$$

۱- آنچه در اینجا گفته شد صرفاً نوعی توضیح منطقی و تهودی برای رابطه $P(A|B)$ است و به عنوان اثبات دقیق ریاضی مد نظر نیست.

مثال: اعداد ۱ تا ۹ را روی نُد کارت می‌نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل: برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشند. اما اعداد زوج چهار تا و اعداد فرد پنج تا هستند.

A : پیشامد اینکه هر سه عدد زوج باشند.

B : پیشامد اینکه مجموع اعداد سه کارت زوج باشند.

لذا تعداد حالت‌هایی که هر سه عدد زوج باشند برابر است با $\binom{4}{3} = 4$ و تعداد حالت‌هایی که دو عدد فرد و یکی زوج باشند، برابر است با $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 40$. بنابراین ۴۴ حالت هست که مجموع سه عدد زوج باشند و در ۴ حالت آن هر سه عدد زوج اند. پس:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{44} = \frac{1}{11}$$

مثال: فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$ باشد. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاقی «قهرمان شدن» یا «بردن اصلی‌ترین رقیب» برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

A : پیشامد قهرمان شدن

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad P(A|B) = \frac{1}{3}$$

B : پیشامد برد اصلی‌ترین رقیب

حل: هدف محاسبه $P(A \cup B)$ است و برای آن داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = \frac{1}{18}$$

حال با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$P(A \cup B) = \frac{13}{36}$$

و با جای گذاری مقادیر داریم:

پیشامدهای مستقل

در مثال‌های قبل دیدیم که برخی پیشامدها بر احتمال وقوع پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارند ولی برخی پیشامدها بر احتمال وقوع یکدیگر تأثیری ندارند.

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد.

به عبارتی در این صورت وقوع B ، احتمال وقوع A را کم یا زیاد نمی کند. در واقع احتمال وقوع A با شرط رخ دادن B و بدون این شرط یکسان است. یعنی پیشامد A از B مستقل است، هرگاه $P(A|B) = P(A)$ ، $(P(B) \neq 0)$. اما از آنجا که داریم $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ، پس:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

* مستقل بودن A از B معادل است با اینکه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

از این رابطه به وضوح نتیجه می شود که اگر A نسبت به B مستقل باشد، B نیز نسبت به A مستقل است. لذا می توان گفت:

دو پیشامد A و B از هم مستقل اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

حال این سؤال مطرح می شود که آیا استقلال یا عدم استقلال دو پیشامد را همیشه می توان به طور شهودی تشخیص داد یا اینکه چه وقت باید از رابطه * برای تشخیص استقلال دو پیشامد استفاده کرد.

$$(۱) \text{ با توجه به رابطه محاسبه احتمال، یعنی: } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

اگر پیشامدی مانند B با وقوع پیشامد A هیچ ارتباطی نداشته باشد، می توان به سادگی نشان داد که وقوع پیشامد B ، احتمال وقوع پیشامد A را تغییر نمی دهد؛ بنابراین دو پیشامد مذکور از هم مستقل اند.

مثال: یک سکه و یک تاس را پرتاب می کنیم. این احتمال را که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید، محاسبه کنید.
حل: فرض کنیم

A : پیشامد روشن شدن عددی زوج در پرتاب تاس

B : پیشامد پشت آمدن سکه

طبق آنچه گفته شد به سادگی دیده می شود که وقوع پیشامد B بر $P(A)$ تأثیر نمی گذارد. بنابراین پیشامدهای A و B از هم مستقل اند و داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مثال: خانواده‌ای دارای دو فرزند است. مطلوب است احتمال اینکه هر دو فرزند آنها پسر باشند.

حل: جنسیت فرزندان پیشامدهایی از هم مستقل اند، بنابراین می‌توان به صورت زیر عمل کرد.

A : پیشامد پسر بودن فرزند اول

B : پیشامد پسر بودن فرزند دوم

$$\text{احتمال پسر بودن هر دو} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مثال: فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر $\frac{5}{8}$ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر $\frac{8}{10}$ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان خواهد شد؟

حل:



A : پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران $\rightarrow P(A) = \frac{5}{8}$

B : پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال ایران $\rightarrow P(B) = \frac{8}{10}$

به وضوح دیده می‌شود که A و B از هم مستقل اند، پس $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{10} = \frac{5}{10}$ اما با توجه به نحوه انتخاب A و B ، پیشامد قهرمانی حداقل یکی از آنها به صورت $A \cup B$ است و داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} + \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{9}{8}$$

در مثال‌های قبل استقلال دو پیشامد به سادگی تشخیص داده شد و از آن در حل مسئله استفاده شد. اما آیا همیشه تشخیص مستقل یا وابسته بودن دو پیشامد به همین آسانی است؟

(۲) اگر در ظاهر A و B پیشامدهایی باشند که وقوعشان با هم در ارتباط است، نمی‌توان به طور قطع گفت که A و B مستقل نیستند.

برای توضیح بیشتر به دو مثال بعد توجه کنید.

مثال: دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

(الف) مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود.

(ب) مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود.

(پ) مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ شود.

حل: با توجه به اصل ضرب می‌دانیم که در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت وجود دارد. $(n(S) = 36)$

(الف) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده ۵ شود به صورت زیر است:

$$\{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

نیمه گذشته:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود، برابر است با: $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

(ب) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، به صورت زیر است:

$$\{(4,3) \text{ و } (3,4) \text{ و } (5,2) \text{ و } (2,5) \text{ و } (6,1) \text{ و } (1,6)\}$$

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، برابر است با: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(ب) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ می‌شود، به صورت زیر است:

$$\{(5,5) \text{ و } (6,4) \text{ و } (4,6)\}$$

بنابراین احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود برابر است با: $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

اگر پیشامد B را رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول در نظر بگیریم، بررسی می‌کنیم که این پیشامد نسبت به هر یک از پیشامدهای مطرح شده در قسمت‌های (الف) و (ب) و (پ) از مثال قبل مستقل است یا نه.

مثال: دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم.

الف) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۵ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود، مستقل از یکدیگرند؟

پیشامد B

پیشامد A

(ب) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۷ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود، مستقل از یکدیگرند؟

پیشامد B

پیشامد A

(پ) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود، مستقل از یکدیگرند؟

پیشامد B

پیشامد A

حل: در این مثال از آنجا که پیش فرض رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول مفروض است، تمام حالات ممکن به صورت زیر خواهد بود و ۶ عضو دارد.

$$B = \{(2,1) \text{ و } (2,2) \text{ و } (2,3) \text{ و } (2,4) \text{ و } (2,5) \text{ و } (2,6)\}$$

حال در هر حالت می‌خواهیم صحت رابطه $P(A|B) = P(A)$ را بررسی کنیم. برای هر سه قسمت، $P(A)$ را در اولین مثال این درس محاسبه کردیم. کافی است $P(A|B)$ را در هر سه قسمت به دست آوریم.

الف) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۵ است، حالت $(2,3)$ است. پس احتمال اینکه مجموع ۵ ظاهر شود، برابر $\frac{1}{6}$ است. بنابراین وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{1}{9}$ به $\frac{1}{6}$ افزایش می‌دهد. لذا در این حالت A و B مستقل نیستند.

(ب) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۷ است، حالت $(2,5)$ است. پس احتمال اینکه مجموع ۷ ظاهر شود، برابر $\frac{1}{6}$ است. بنابراین

بنابراین در حالت احتمال اینکه

مجموع دو ناس برابر ۱۰ شود، صفر است.

خواندنی

عوامل ژنتیک در شکل گیری صفات انسان نقش دارند و از والدین به فرزندان منتقل می شوند. آیا تاکنون دقت کرده اید که نرمه گوش انسان می تواند دو حالت داشته باشد، یکی پیوسته و یکی آزاد؟ با توجه به این موضوع سوالاتی از این قبیل می توانند مطرح باشند:

اگر مردی نرمه گوش آزاد و همسرش نرمه گوش پیوسته داشته باشند، آیا می توان پیش بینی کرد که فرزند آنها چه نوع نرمه گوشی خواهد داشت؟

در ادامه به کمک علم احتمال به مسئله بالا می پردازیم.



A نرمه گوش آزاد



a نرمه گوش پیوسته

مثال: در علم ژنتیک برای ایجاد برخی صفات در فرزندان دو عامل را مؤثر می دانند که یکی از پدر و یکی از مادر به ارث می رسد. فرض کنیم این دو عامل را که در تعیین شکل نرمه گوش فرزند مؤثرند با A و a نمایش دهیم که در آن:

A : عامل به وجود آمدن نرمه گوش آزاد

a : عامل به وجود آمدن نرمه گوش پیوسته

بنابراین هر فرد به یکی از حالت های AA یا Aa یا aA می تواند باشد که با احتمال $\frac{1}{4}$ هر یک از آنها را به فرزند خود می تواند انتقال دهد و تأثیر آن بر نرمه گوش فرزند به صورت زیر است:

– اگر عامل های فرزند به صورت AA باشد، این فرد دارای نرمه گوش آزاد است.

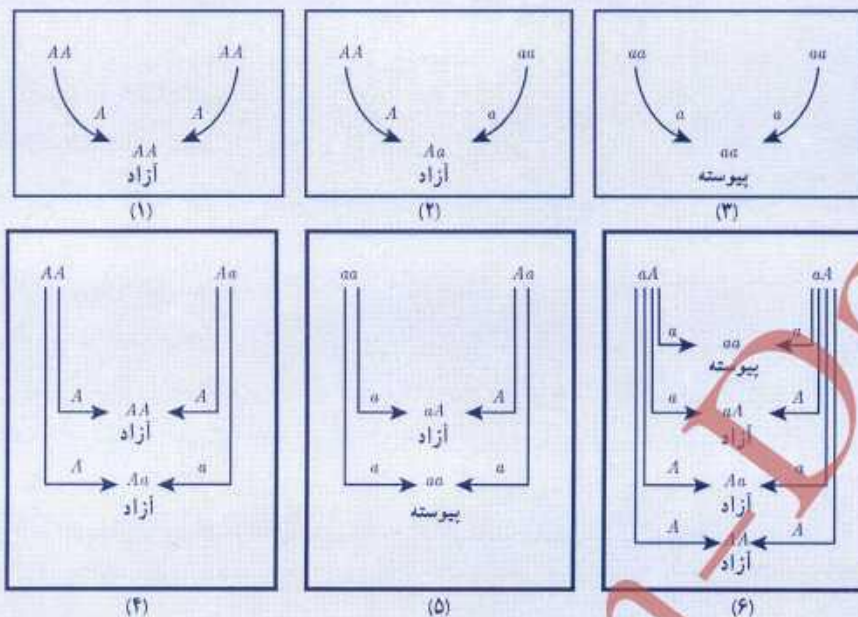
– اگر عامل های فرزند به صورت aa باشد، این فرد دارای نرمه گوش پیوسته است.

– اگر عامل های فرزند به صورت Aa باشد، این فرد دارای نرمه گوش آزاد است، به همین دلیل عامل A را غالب و عامل a را مغلوب می نامند. به طور خلاصه داریم:

عامل های شخص	AA	aA یا Aa	aa
نوع نرمه گوش شخص	آزاد	آزاد	پیوسته

– به حالت های AA و aa خالص و به حالت Aa ناخالص می گویم.

در شکل های صفحه بعد حالت های مختلف انتقال عوامل از پدر و مادر به فرزند نمایش داده شده اند.



فرض کنیم احتمال هر یک از دو عامل هر فرد به فرزندش $\frac{1}{2}$ باشد. اگر از میان افراد یک جامعه آماری که نرمه گوش آزاد دارند، ۵۰ درصدشان خالص و ۵۰ درصدشان ناخالص باشند، هر یک از احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

اگر علی نرمه گوش آزاد و همسرش نرمه گوش پیوسته داشته باشد، و آنها یک فرزند با نرمه گوش پیوسته داشته باشند، با چه احتمالی نرمه گوش فرزند دوم آنها پیوسته خواهد بود؟

حل: از آنجا که پدر، نرمه گوش آزاد دارد، عامل‌های او به صورت AA یا Aa است. اما اگر عامل‌های پدر به صورت AA باشد، نرمه گوش فرزندان آنها به صورت آزاد خواهد بود. بنابراین عامل‌های پدر به صورت Aa است. از طرفی از آنجا که مادر نرمه گوش پیوسته دارد، لذا عامل‌های او به صورت aa خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل ۵ به احتمال $\frac{1}{2}$ فرزند دوم آنها نرمه گوش پیوسته خواهد داشت.

تمرین

- در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.
- یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به دست آورید. به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.
- فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند. الف) نشان دهید A' و B مستقل اند. ب) با توجه به الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل اند.

نویسنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و الیمن سلطان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

۴ احمد به احتمال $\frac{7}{10}$ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال $\frac{8}{10}$ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

- الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.
 ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.
 پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.
 ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.
 ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۵ احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر $\frac{625}{1000}$ باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۶ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

۷ ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A ، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{7}$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

تپه کنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین فصل ۷ - صفحه ۱۵۱

تمرین ۱: A = ظاهر شدن عدد زوج B = ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ C = ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad B = \{3, 6\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad C = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

* ظاهر شدن عدد زوج به شرط ظاهر شدن مضرب ۳

$$P(A|B) = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \{3, 6\} \quad \text{چون } P(A|B) = P(A) \text{ پس } A \text{ و } B \text{ مستقل هستند.}$$

** ظاهر شدن عدد زوج به شرط ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$$P(A|C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \{3, 4, 5, 6\} \quad \text{چون } P(A|C) = P(A) \text{ پس } A \text{ و } C \text{ مستقل هستند.}$$

*** ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ به شرط ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$$P(B|C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \{3, 4, 5, 6\} \quad \text{چون } P(B|C) \neq P(B) \text{ پس } B \text{ و } C \text{ مستقل نیستند.}$$

تمرین ۲:

$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر)\}$$

$$A = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{ظاهر شدن رو در پرتاب سوم سکه}$$

$$B = \{(پ, پ, پ), (پ, ر, پ)\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{ظاهر شدن پشت در دو پرتاب اول و دوم}$$

تمرین ۳: چون پیشامدهای A و B مستقل هستند

الف) می خواهیم ثابت کنیم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A') \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B - A) = P(B \cap A') = P(A' \cap B)$$

ب) می خواهیم ثابت کنیم: $P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$

$$P(A') \times P(B') = (1 - P(A)) \times (1 - P(B)) = 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - (P(B) + P(A) - P(A \cap B)) = 1 - P(A \cup B) = P(A \cup B)' = P(A' \cap B')$$

تمرین ۴: A = انتخاب در تیم کوهنوردی B = انتخاب در تیم ملی فوتبال نوجوانان

الف) باید $P(A \cap B)$ را بدست آوریم و چون پیشامدهای A و B مستقل هستند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.07 \times 0.08 = 0.0056$$

ب) باید $P(A' \cap B')$ را بدست آوریم و چون پیشامدهای A' و B' مستقل هستند، پس:

$$P(B') = 1 - P(B) \Rightarrow P(B') = 1 - 0.08 = 0.92$$

$$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow P(A') = 1 - 0.07 = 0.93$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') \Rightarrow P(A' \cap B') = 0.93 \times 0.92 = 0.8556$$

پ) باید $P(B - A)$ را بدست آوریم، پس:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B - A) = 0.08 - 0.0056 = 0.0744$$

ت) باید $P(A - B) + P(B - A)$ را بدست آوریم، پس:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = 0.07 - 0.0056 = 0.0644$$

$$P(A - B) + P(B - A) = 0.0644 + 0.0744 = 0.1388$$

ث) باید $P(A \cup B)$ را بدست آوریم، پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0.07 + 0.08 - 0.0056 = 0.1444$$

تمرین ۵: A = احتمال قبول شدن رویا در درس ریاضی B = احتمال قبول شدن دوستش در درس ریاضی $P(A) = ?$ $P(A \cup B) = 0.625$

$$P(A) = 2P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times \frac{1}{2}P(A) = \frac{1}{2}(P(A))^2$$

چون پشامدهای A و B مستقل هستند، پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.625 = P(A) + \frac{1}{2}P(A) - \frac{1}{2}(P(A))^2 \Rightarrow$$

$$0.625 = 2P(A) + P(A) - (P(A))^2 \Rightarrow (P(A))^2 - 3P(A) + 0.625 = 0 \Rightarrow$$

$$t^2 - 3t + 0.625 = 0 \Rightarrow (t - 2/5)(t - 0.5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2/5 \\ t = 0.5 \Rightarrow P(A) = 0.5 \end{cases}$$

B = مجموع اعداد رو شده برابر ۸

تمرین ۶: A = هر دو عدد رو شده زوج

$$A = \{(2, 6), (6, 2), (5, 3), (3, 5), (4, 4)\}$$

$$(A \cap B) = \{(2, 6), (6, 2), (4, 4)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{3}{5}$$

$$P(A) = \frac{1}{5} \quad P(B) = \frac{1}{5} \quad P(B|A) = \frac{1}{4} \quad P(A \cup B) = ?$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{n(A \cap B)}{\frac{1}{5}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{28 + 28 - 7}{40} = \frac{49}{40}$$

تمرین ۷

نویسنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

مقدمه

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی که در ادامه با آنها آشنا خواهید شد، می‌پردازد. آمار توصیفی اطلاعاتی از چگونگی داده‌های جمع‌آوری شده فراهم می‌آورد که بسیار مفید است.

معیارهای گرایش به مرکز

معمولاً سعی می‌شود، دانسته‌های نهفته در داده‌ها را به صورت یک یا چند عدد شاخص درآورد، تا بتوان هم اندیشه کلی درباره ویژگی مورد مطالعه به دست آورد و هم نتیجه مطالعات را به سادگی گزارش کرد. میانگین و میانه به عنوان معیارهای گرایش به مرکز در این کتاب معرفی می‌شوند.

میانگین

میانگین ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز است که در پایه هشتم با آن آشنا شده‌اید.

میانگین متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست که آن را با $\bar{X}$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

که در آن x_i داده‌ها و N برابر با تعداد کل داده‌ها است.

فعالیت

محمد، جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت کرد. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد:

دوست	رضا	نیما	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۴۲

نحوه محاسبه میانگین

$$۴۲ + ۵۵ + ۵۷ + ۶۱ + ۵۵ = ۲۹۰$$

$$\frac{۲۹۰}{۵} = ۵۸$$

۱۵۲

۱ محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه کرد:

۲ سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم کرد:

نکته گفته:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و زمین مطالعه ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

$$\bar{x} = \frac{ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n}{n} = \frac{a(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} = a\bar{x}$$

$$\bar{x} + a = \frac{(x_1 + a) + (x_2 + a) + \dots + (x_n + a)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + na}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{na}{n} = \bar{x} + a$$

ویزگی‌های میانگین

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آنها نیز با همان مقدار ثابت جمع خواهد شد. چرا؟
اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آنها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

کار در کلاس



۱ در فعالیت قبل، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟ $58 \times 100 = 5800$

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجه

سانتی‌گراد باشد، میانگین دمای هوا چند درجه فارنهایت است؟ (راهنمایی $F = \frac{9}{5}C + 32$)

$$F = \frac{9}{5}(28) + 32 = \frac{252}{5} + 32 = 50.4 + 32 = 82.4$$

میان

پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است می‌نامیم و آن را با Q_2 نمایش می‌دهیم.

مثال: در فعالیت قبل، میانه داده‌ها کدام است؟

محمد برای پاسخ به این سؤال:

الف) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد:

۵۵ ۵۵ ۵۷ ۶۱ ۶۲

ب) جرم رضا و احمد از سام کمتر است. در حالی که جرم علی و نیما از سام بیشتر است.

در مثال فوق، عدد ۵۷ را میانه داده‌ها می‌نامند، زیرا پس از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ، در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد. روش محاسبه میانه:



توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir



مثال: اعداد زیر نمره‌های درس ریاضی سمیرا در طول یک سال است.
- میانگین و میانه نمره‌های او را حساب کنید.

۱۹ ۱۷ ۱۸ ۱۸ ۲۰ ۵

الف) محاسبه میانگین

$$\bar{X} = \frac{19+17+18+18+20+5}{6} = 16/17$$

ب) محاسبه میانه

$$Q_2 = \frac{18+18}{2} = 18$$

پ) به نظر شما کدام معیار توانایی دانش آموز در این درس را بهتر ارزیابی می‌کند؟ چرا؟
چون نمره ۵ باعث شده میانگین خیلی کم شود. در صورتی که این دانش آموز آثراً نمرات خوبی داشته است.

میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ یا خیلی کوچک که در آمار به آنها داده‌های دورافتاده می‌گوییم، قرار می‌گیرد. در صورتی که میانه داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دور افتاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین در صورت وجود داده دورافتاده، از میانه استفاده می‌کنیم در غیر این صورت از میانگین استفاده خواهیم کرد.

کار در کلاس



داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش آموز پایه یازدهم، قبل از یک مسابقه دو است.

۸۶ ۹۷ ۹۲ ۸۹ ۱۰۱ ۹۸ ۹۸ ۹۸ ۱۰۵ ۷۵ ۸۲ ۹۱ ۱۰۰
- میانه داده‌ها را مشخص کنید.

$$Q_2 = \frac{92+97}{2} = 94.5$$

- میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

$$\bar{X} = \frac{75+82+86+89+91+92+94+98+98+100+101+105}{12} = \frac{1114}{12} \approx 92.83$$

معیارهای پراکندگی

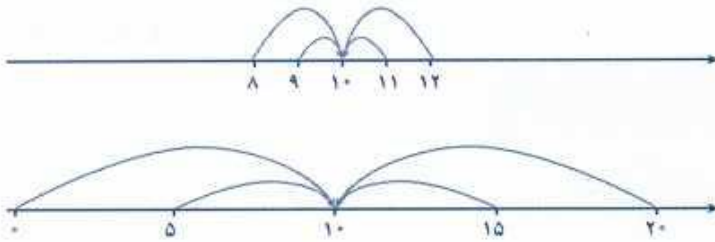
میانه و میانگین اطلاعاتی پیرامون مرکز داده‌ها در اختیار ما قرار می‌دهند. گاه در توصیف داده‌ها لازم است از چگونگی پراکندگی آنها نیز اطلاعی داشته باشیم. در این درس با دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار، چارک اول و چارک سوم به عنوان معیارهای پراکندگی آشنا خواهیم شد.

توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی نهم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

نمره درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است:



A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰

الف) میانه نمره این دو کلاس را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} 8, 9, 10, 11, 12 & \quad Q_r = 10 \\ 0, 5, 10, 15, 20 & \quad Q_r = 10 \end{aligned}$$

$$\bar{x}_A = \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

ب) میانگین نمره این دو کلاس را محاسبه کنید.

$$\bar{x}_B = \frac{0+5+10+15+20}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

ب) به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

همان‌طور که در فعالیت می‌بینید، تنها توجه به معیارهای گرایش به مرکز نمی‌تواند اطلاعات کاملی از داده‌ها در اختیار ما قرار دهد و لازم است به چگونگی پراکندگی داده‌ها نیز توجه نمود.

دامنه تغییرات

دامنه تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها را نشان می‌دهد و آن را با نماد R نمایش می‌دهیم.

مثال: در فعالیت بالا برای محاسبه دامنه تغییرات نمره ریاضی کلاس A و کلاس B به صورت زیر عمل کنید:

کلاس A	کلاس B	
۸	۰	کوچک‌ترین داده
۱۲	۲۰	بزرگ‌ترین داده
$12 - 8 = 4$	$20 - 0 = 20$	دامنه تغییرات

در فعالیت بالا دامنه تغییرات نمره ریاضی کلاس A، ۴ نمره و دامنه تغییرات نمره ریاضی کلاس B، ۲۰ نمره است. ملاحظه می‌شود که در کلاس A پراکندگی داده‌ها کمتر از کلاس B است.



معلم از ۷ نفر از دانش‌آموزان خواست تا تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده‌اند، گزارش کنند.
الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

$$R = 15 - 1 = 14$$

ب) دو دانش‌آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنه تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید.

$$R = 15 - 1 = 14$$

پ) از مقایسه پاسخ الف و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ هر دو با هم برابرند. چون دامنه تغییرات فقط به بزرگترین داده و کوچکترین داده بستگی دارد.

همان طور که می‌بینید، دامنه تغییرات تنها به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی‌تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده‌ها باشد.

واریانس

می‌خواهیم شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها پیدا کنیم. از آنجا که میانگین، معیاری برای مرکز داده‌ها است، شاخصی که بیانگر اختلاف داده‌ها از میانگین باشند و معایب وارد بر دامنه تغییرات را برطرف سازد، می‌تواند شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها باشد.

فعالیت

الف) در ادامه فعالیت قبل اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جدول‌های زیر محاسبه کنید.

کلاس A	
x_i	$(x_i - \bar{x})$
۸	$۸ - ۱۰ = -۲$
۹	$۹ - ۱۰ = -۱$
۱۰	$۱۰ - ۱۰ = ۰$
۱۱	$۱۱ - ۱۰ = ۱$
۱۲	$۱۲ - ۱۰ = ۲$

کلاس B	
y_i	$(y_i - \bar{y})$
۰	$۰ - ۱۰ = -۱۰$
۵	$۵ - ۱۰ = -۵$
۱۰	$۱۰ - ۱۰ = ۰$
۱۵	$۱۵ - ۱۰ = ۵$
۲۰	$۲۰ - ۱۰ = ۱۰$

ب) مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

$$۱۵۷ \text{ میانگین کلاس A} \quad (-۲) + (-۱) + ۰ + ۱ + ۲ = ۰$$

$$۱۵۷ \text{ میانگین کلاس B} \quad (-۱۰) + (-۵) + ۰ + ۵ + ۱۰ = ۰$$

توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

در هر دو کلاس، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین داده‌ها صفر شد. با مراجعه به تعریف میانگین، بدیهی است این نتیجه اتفاقی نبوده است.

همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر خواهد شد.

بنابراین برای ساختن شاخصی که پراکندگی حول میانگین را نشان دهد، باید از قدر مطلق اختلاف داده‌ها از میانگین یا از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین استفاده کرد. استفاده از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین متداول‌تر است.

الف) مجذور اختلاف از میانگین برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B را به کمک جداول زیر محاسبه کنید.

کلاس A			کلاس B		
x_i	$(x_i - \bar{X})$	$(x_i - \bar{X})^2$	y_i	$(y_i - \bar{Y})$	$(y_i - \bar{Y})^2$
۸	-۲	۴	۰	-۱۰	۱۰۰
۹	-۱	۱	۵	-۵	۲۵
۱۰	۰	۰	۱۰	۰	۰
۱۱	۱	۱	۱۵	۵	۲۵
۱۲	۲	۴	۲۰	۱۰	۱۰۰

ب) مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A: $(۸-۱۰)^2 + \dots + (۱۲-۱۰)^2 = ۱۰$

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B: $(۰-۱۰)^2 + \dots + (۲۰-۱۰)^2 = ۲۵۰$

پ) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A: $\frac{(۸-۱۰)^2 + \dots + (۱۲-۱۰)^2}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B: $\frac{(۰-۱۰)^2 + \dots + (۲۰-۱۰)^2}{۵} = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آنها را واریانس می‌نامند و از نماد σ^2

برای نمایش آن استفاده می‌شود: $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_N - \bar{X})^2}{N}$

تذکر: واحد واریانس برابر با توان دوم واحد داده مورد نظر است.

$$\begin{aligned} * b_{a_n}^r &= \frac{(a_{n_1} - \bar{a})^r + \dots + (a_{n_N} - \bar{a})^r}{N} = \frac{(a(n_1 - \bar{n}))^r + \dots + (a(n_N - \bar{n}))^r}{N} \\ &= \frac{a^r (n_1 - \bar{n})^r + \dots + a^r (n_N - \bar{n})^r}{N} = a^r \left[\frac{(n_1 - \bar{n})^r + \dots + (n_N - \bar{n})^r}{N} \right] = a^r b_n^r \end{aligned}$$

جذر واریانس را انحراف معیار می نامند و آن را با نماد σ نمایش می دهند:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_N - \bar{X})^2}{N}}$$

برای گزارش پراکندگی کدام شاخص را ترجیح می دهید؟ چرا؟ انحراف معیار، چون واحدها را دارد و با واحدها همساز است.

مجدداً این سؤال را مطرح می کنیم که در این فعالیت، به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات که با cv نمایش داده می شود، نسبت انحراف معیار به میانگین ($cv = \frac{\sigma}{\bar{X}}$) است و معمولاً به صورت درصد بیان می شود. مزیت این ضریب آن است که به واحد اندازه گیری بستگی ندارد. بنابراین اگر داده های مربوط به یک کمیت در دو جامعه با واحدهای متفاوت بیان شده باشد و یا با واحدهایی که نمی شناسیم بیان شده باشند می توان برای مقایسه پراکندگی داده ها در دو جامعه از این ضریب استفاده کرد.

مثال: ضریب تغییرات نمره ریاضی کلاس A و کلاس B در فعالیت قبل محاسبه شد.

	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کلاس A	۱۰	۱.۶	$\frac{1.6}{10} = 0.16$ یا ۱۶%
کلاس B		۱.۰۷	$\frac{1.07}{10} = 0.107$ یا ۱۰.۷%

انتخاب نایس

معلم ریاضی ترجیح می دهد در کلاس A، که ضریب تغییرات کمتری دارد، تدریس کند.

کار در کلاس

دمای هوای یک هفته اسفند مشهد و کیش، به ترتیب به فارنهایت و سانتی گراد گزارش شده است. دمای هوای این هفته در کدام شهر از ثبات بیشتری برخوردار است (ضریب تغییرات کمتری دارد)؟

جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
۳۷	۳۷	۳۹	۴۱	۴۹	۵۳	۵۰ (مشهد (فارنهایت))
۲۱	۲۲	۲۲	۲۳	۲۴	۲۶	۲۷ (کیش (سانتی گراد))

$$\bar{x} = \frac{50 + 53 + 49 + 41 + 39 + 37 + 37}{7} = \frac{306}{7} \approx 43.71 \rightarrow 44$$

۱۶۰

$$s^2 = \frac{(4)^2 + (9)^2 + (5)^2 + (3)^2 + (5)^2 + (7)^2 + (7)^2}{7} = \frac{274}{7} \approx 39.14 \quad s = \sqrt{39.14} \approx 6.25$$

$$\bar{x} = \frac{27 + 26 + 24 + 23 + 22 + 22 + 21}{7} = \frac{145}{7} \approx 20.71 \rightarrow 21$$

$$s^2 = \frac{(5)^2 + (4)^2 + (2)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (2)^2 + (3)^2}{7} = \frac{31}{7} \approx 4.43 \quad s = \sqrt{4.43} \approx 2.11$$

چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. بدیهی است چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با Q_1 و چارک سوم را با Q_3 نمایش می‌دهند.

۲۲	۲۴	۴۸	۵۱	۶۰	۷۰	۷۵	۸۰	۸۷	۹۳	۹۵
		چارک اول			میانه			چارک سوم		

می‌بینید که ۲۵ درصد داده‌ها از ۴۸ (چارک اول)، ۵۰ درصد داده‌ها از ۷۰ (میانه) و ۷۵ درصد داده‌ها از ۸۷ (چارک سوم) کمتر است.
محاسبه چارک‌ها:



مثال: تعداد تصادف‌های اتومبیل‌ها در ۱۵ روز اول تابستان در شهری به صورت زیر گزارش شده است.

۱۲ ۱۰ ۱۵ ۲۳ ۱۴ ۲۷ ۱۶ ۳۴ ۴۳ ۴۱ ۳۲ ۱۸ ۲۵ ۳۱ ۱۹

چارک‌ها را مشخص کنید:

۱۰ ۱۲ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۸ ۱۹ ۲۳ ۲۵ ۲۷ ۳۱ ۳۲ ۳۴ ۴۱ ۴۳

چارک اول میانه چارک سوم

توجه به این نکته نیز ضروری است که با توجه به تعداد داده‌ها، ممکن است چارک‌ها دقیقاً خود داده‌ها نباشند و در فاصله بین دو داده متوالی قرار گیرند.

توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

خواندنی

علاوه بر چارک، از دهک و صدک نیز استفاده می‌شود. دهک‌ها (دهک اول، دهک دوم، ... و دهک نهم) مقادیر نه داده هستند که داده‌های مرتب شده را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دهک پنجم همان میانه است.

به نقل از روزنامه همشهری ۹۲/۱/۹، شناسایی سه دهک پایین درآمدی باید در دستور کار دولت قرار گیرد. با توجه به این جمله چه افرادی باید شناسایی شوند؟

درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. با فرض صحت بودن C

اگر دولت بخواهد یارانهٔ افرادی را که درآمد آنها بیشتر از دهک هشتم است، حذف کند و به یارانهٔ افرادی که درآمد آنها از دهک سوم کمتر است، ۵۰ درصد اضافه کند، آیا برای دولت مقرون به صرفه است؟

صدک‌ها (صدک اول، صدک دوم و صدک نود و نهم) مقادیر نود و نه داده‌اند که داده‌های مرتب شده را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. صدک دهم همان دهک اول و صدک بیست و پنجم همان چارک اول است.

کودکانی که زیر صدک سوم قد رشد می کنند، فارغ از اندازه قد باید ارزیابی شوند.

— منظور از صدک سوم قد چیست؟
— بر اساس جمله فوق چه کودکانی باید مورد ارزیابی قرار گیرند؟

181

154

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

۴ میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال های ۹۴-۸۴ را بر اساس جدول زیر محاسبه کنید.

سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۸/۴	۲۵/۴	۱۰/۸	۱۲/۴	۲۱/۵	۳۰/۵	۳۴/۷	۱۵/۶	۱۱/۹

۵ در جدول زیر ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهگیلویه و بویراحمد دیده می شود.

(راهنمایی: $1m = 3/281ft$ ، فوت: ft ، متر: m)

مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد		
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت
فاصله از سطح دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۲۲۴۸/۱۹ (ft)

الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

ب) انحراف معیار ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

پ) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟

خواندنی

شاخص تورم (شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی) معیار سنجش تغییرات قیمت کالاها و خدماتی است که توسط خانوارها در یک جامعه به مصرف می رسد. این شاخص به عنوان وسیله ای برای اندازه گیری سطح عمومی قیمت کالاها و خدمات مورد مصرف خانوارها، یکی از بهترین معیارهای سنجش تغییر قدرت خرید پول داخل کشور به شمار می رود. برای محاسبه شاخص تورم سال ۱۳۹۰ به عنوان سال پایه، ۲۹۴ قلم کالا و ۹۱ قلم خدمت با توجه به اهمیت آنها به طریق علمی انتخاب شده است. برای محاسبه شاخص تورم از رابطه زیر استفاده می شود:

سال	شاخص تورم	نرخ تورم
۱۳۸۴	۳۹/۸۰	۱۰/۴
۱۳۸۵	۴۴/۵۳	۱۱/۹
۱۳۸۶	۵۲/۷۴	۱۸/۴
۱۳۸۷	۶۶/۱۲	۲۵/۴
۱۳۸۸	۷۳/۲۳	۱۰/۸
۱۳۸۹	۸۲/۳۱	۱۲/۴
۱۳۹۰	۱۰۰/۰۰	۲۱/۵
۱۳۹۱	۱۳۰/۵۴	۳۰/۵
۱۳۹۲	۱۷۵/۸۸	۳۴/۷
۱۳۹۳	۲۰۳/۲۴	۱۵/۶
۱۳۹۴	۲۲۷/۴۶	۱۱/۹

$$I_t = \frac{P^1_t Q^0_t + \dots + P^{385}_t Q^0_t}{P^0_t Q^0_t + \dots + P^{385}_t Q^0_t} \times 100$$

که در آن

I_t : شاخص تورم در زمان t

P^t_t : قیمت کالا یا خدمت t ام در زمان t

P^0_t : قیمت کالا یا خدمت t ام در زمان پایه

Q^t_t : مقدار مصرف کالا یا خدمت t ام در زمان t

Q^0_t : مقدار مصرف کالا یا خدمت t ام در زمان پایه

برای محاسبه نرخ تورم (Inf_t) از رابطه زیر استفاده می شود:

$$Inf_t = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}} \times 100$$

I_t شاخص تورم در سال مورد نظر و I_{t-1} شاخص تورم در سال قبل از آن است.

تپه گنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و الیمن دستان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین فصل ۷ - صفحه ۱۶۲

$$\bar{x}_A = 11000, \sigma_A = 2000 \quad CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{2000}{11000} \approx 0.18$$

$$\bar{x}_B = 10000, \sigma_B = 1000 \quad CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{1000}{10000} = 0.1$$

لاستیک نوع B بهتر است چون ضریب تغییراتش کمتر است.

تمرین ۳ الف)

$$\bar{x}_{mina} = \frac{23+24+25+26+27}{5} = \frac{125}{5} = 25$$

$$\bar{x}_{maryam} = \frac{15+20+25+30+35}{5} = \frac{125}{5} = 25$$

ب)

$$\sigma_{mina}^2 = \frac{(23-25)^2 + (24-25)^2 + (25-25)^2 + (26-25)^2 + (27-25)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sigma_{maryam}^2 = \frac{(15-25)^2 + (20-25)^2 + (25-25)^2 + (30-25)^2 + (35-25)^2}{5} = \frac{100+25+0+25+100}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

ب) برای مینا چون پراکندگی پول توجیبی آن کمتر است.

تمرین ۴

$$10/4, 10/8, 11/9, 11/9, 12/4, 15/6, 18/4, 21/5, 25/4, 30/5, 34/7$$

$$Q_7 = 15/6$$

الف)

$$\bar{x} = \frac{10/4 + 10/8 + 11/9 + 11/9 + 12/4 + 15/6 + 18/4 + 21/5 + 25/4 + 30/5 + 34/7}{11} = \frac{203/5}{11} = 18/5$$

$$\sigma^2 = \frac{(10/4 - 18/5)^2 + (10/8 - 18/5)^2 + 2(11/9 - 18/5)^2 + (12/4 - 18/5)^2 + (15/6 - 18/5)^2}{11}$$

$$+ \frac{(18/4 - 18/5)^2 + (21/5 - 18/5)^2 + (25/4 - 18/5)^2 + (30/5 - 18/5)^2 + (34/7 - 18/5)^2}{11}$$

$$= \frac{65/61 + 43/56 + 0 + 1 + 47/61 + 59/29 + 37/21 + 9 + 144 + 262/44 + 8/41}{11} = \frac{677/14}{11} \approx 61/56$$

$$\sigma = \sqrt{61/56} \approx 7/85$$

نویسندگان:

گروه ریاضی دوره دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۵

مرکزی				کهگیلویه و بویر احمد			
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	ياسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا	1708 (m)	1775 (m)	1830 (m)	1920 (m)	6135/47 (ft)	3248/19 (ft)	7218/20 (ft)
	↓ × 3/281	↓ × 3/281	↓ × 3/281	↓ × 3/281	↓ ÷ 3/281	↓ ÷ 3/281	↓ ÷ 3/281
	5603/948 (ft)	5823/775 (ft)	6004/23 (ft)	6299/52 (ft)	1870 (m)	990 (m)	2200 (m)

$$\bar{x} = \frac{1708 + 1775 + 1830 + 1920}{4} = \frac{7233}{4} = 1808/25 \rightarrow 1808$$

الف)

$$\sigma^2 = \frac{(1708 - 1808)^2 + (1775 - 1808)^2 + (1830 - 1808)^2 + (1920 - 1808)^2}{4} = \frac{(-100)^2 + (-33)^2 + (22)^2 + (112)^2}{4}$$

ب)

$$= \frac{10000 + 1089 + 484 + 12544}{4} = \frac{24117}{4} \approx 6029/25$$

$$\sigma = \sqrt{6029/25} \approx 77/64$$

$$\bar{x} = \frac{1870 + 990 + 2200}{3} = \frac{5060}{3} \approx 1686/7$$

ب) شهرهای استان مرکزی ارتفاع بیشتری از سطح دریا دارند.